УДК 517.977

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В СИСТЕМАХ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ ПРИ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Ш.Ш.ЮСУБОВ
Бакинский Государственный Университет
yusubov_sh @ mail.ru

В работе изучаются задачи оптимального управления для систем с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях. Получены необходимые условия оптимальности в виде уравнения Эйлера, в виде условия Лежандра-Клебша, а также различные необходимые условия оптимальности для особого в классическом смысле управления.

Ключевые слова: необходимые условия оптимальности, вариации функционала, импульсные воздействия.

Многие реальные процессы описываются дифференциальным уравнением с импульсным воздействием и, поэтому изучению проблем качественной теории дифференциальных систем с импульсным воздействием посвящены многочисленные работы [1-3]. А задачи оптимального управления в таких системах изучены в работах [2,4,5], в которых получены различные необходимые условия оптимальности.

В данной работе также изучаются задачи оптимального управления для систем с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях. Получены аналог уравнения Эйлера, Лежандра-Клебша и различные необходимые условия оптимальности особого в классическом смысле управления.

Постановка задачи

Пусть движение объекта происходит на интервале времени $J=[t_0,T]$ и пусть $\tau_0,\tau_1,...,\tau_m,\tau_{m+1}$ ($t_0=\tau_0<\tau_1<...<\tau_m<\tau_{m+1}=T$) фиксированные моменты времени из этого интервала. Предположим, что на каждом из интервалов $[\tau_{i-1},\tau_i)$ $i=\overline{1,m}$, $[\tau_m,T]$ траектория движения $x(t)\in R^n$ описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),u(t)),\ t_0\le t\le T,\ t\ne\tau_i, \tag{1}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$\alpha_1 x(t_1)+...+\alpha_e x(t_e)=\varphi_0 \tag{2}$$

при импульсных воздействиях

$$x(\tau_i)-x(\tau_i^-)=\varphi_i(x(\tau_i^-)),\ i=\overline{1,m}. \tag{3}$$

Здесь $f(t,x,u)$ - заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных на $[t_0,T]\times R^n\times R^r$ и имеет непрерывные частные производные по x,u до второго порядка включительно, $\varphi_i(x)$- заданные n-мерные дважды непрерывно-дифференцируемые на R^n вектор-функции, $\varphi_0\in R^n$-заданная точка,$t_1,...,t_e$ $(t_0\le t_1<t_2<...<t_{e-1}<t_e\le T)$ фиксированные точки, $u(t)$ - r-мерная кусочно-непрерывная вектор-функция управляющих воздействий со значением из непустого открытого множества $U\subset R^r$ (допустимое управление)

$$u(t)\in U\subset R^r,\ t\in[t_0,T]. \tag{4}$$

Под решением $x(t)$ задачи (1)-(3), соответствующим заданному допустимому управлению $u(t)$, понимается кусочно-абсолютно непрерывная на $[t_0,T]$, $t\ne\tau_i$ функция, а в точках разрыва τ_i существует конечный левый предел

$$x(\tau_i^-)=\lim_{t\to\tau_i,t<\tau_i}x(t),\ i=\overline{1,m}.$$

Будем предполагать, что для каждого допустимого управления $u=u(t)$ краевая задача (1)-(3) имеет единственное решение.

Задача заключается в минимизации функционала

$$S(u)=\varphi(x(t_1),...,x(t_e))+\int_{t_0}^{T}f_0(t,x(t),u(t))\,dt \tag{5}$$

определенного на решениях системы (1)-(3), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, где $\varphi(z_1,...,z_e)$- заданная дважды непрерывно-дифференцируемая по $z_1,...,z_e$ скалярная функция, $f_0(t,x,u)$ - заданная скалярная функция, непрерывная по совокупности переменных и имеющая непрерывные частные производные по x,u до второго порядка включительно.

В дальнейшем задачу о минимуме функционала (5) при ограничениях (1)-(4) назовем задачей (1)-(5), решение этой задачи $u=u(t)$- оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t),x(t))$- оптимальным процессом.

Первая и вторая вариации функционала

Пусть $(u(t),x(t))$ фиксированный допустимый процесс в задаче (1)-(5). Введем обозначения

$H(t,x,u,\psi)\equiv\psi' f(t,x,u)-f_0(t,x,u),\ H_i(x(\tau_i^-),\lambda_i)\equiv\lambda_i'\varphi_i(x(\tau_i^-)),$

$H(t)\equiv H(t,x(t),u(t),\psi(t))$ и т.д., где $\psi(t),t\in[t_0,T]$ и $\lambda_i\ (i=0,1,...,m)$- n-мерные сопряженные вектор-функции и постоянные векторы, соответственно, удовлетворяющие условиям

$$\psi(t)=\int_t^T H_x(\tau)\,d\tau-\sum_{i=1}^{l}\theta(t_i-t)\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_i)}+\sum_{i=1}^{m}\theta(\tau_i^- -t)\frac{\partial H_i}{\partial x(\tau_i^-)}-$$
$$-\sum_{j=1}^{l}\theta(t_j-t)\alpha_j'\lambda_0,$$

$$\sum_{i=1}^{l}\alpha_i'\lambda_0+\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_i)}-\int_{t_0}^{T}H_x(t)\,dt-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial H_i}{\partial x(\tau_i^-)}=0, \tag{6}$$

$$\lambda_i=\int_{t_0}^{T}\theta(t-\tau_i)H_x(t)\,dt-\sum_{k=1}^{l}\theta(t_k-\tau_i)\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_k)}+\sum_{k=1}^{m}\theta(\tau_k^- -\tau_i)\frac{\partial H_k}{\partial x(\tau_k^-)}-$$
$$-\sum_{k=1}^{l}\theta(t_k-\tau_i)\alpha_k'\lambda_0,$$

а $\theta(t-\tau)=\begin{cases}1, & t\ge\tau,\\ 0, & t<\tau\end{cases}$ - функция Хевисайда.

При некоторых ограничениях на данные задачи (1)-(5) можно доказать, что первая и вторая вариации функционала имеют вид:

$$\delta S(u,\delta u)=-\int_{t_0}^{T}H_u'(t)\,\delta u(t)\,dt, \tag{7}$$

$$\delta^2 S(u,\delta u)=\int_{t_0}^{T}\big[\delta x'(t)H_{xx}(t)\delta x(t)+2\delta x'(t)H_{xu}(t)\delta u(t)+$$
$$+\delta u'(t)H_{uu}(t)\delta u(t)\big]dt+\sum_{i,j=1}^{l}\delta x'(t_i)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x(t_i)\partial x(t_j)}\delta x(t_j)-$$
$$-\sum_{i=1}^{m}\delta x'(\tau_i^-)\frac{\partial^2 H_i}{\partial x(\tau_i^-)^2}\delta x(\tau_i^-), \tag{8}$$

где $\delta x(t)$ - вариация траектории, определяемая как решение следующей линейной задачи с нелокальными краевыми условиями при импульсных воздействиях

$$\delta \dot{x}(t) = f_x(t)\delta x(t) + f_u(t)\delta u(t),\ t \in [t_0, T],\ t \neq \tau_i,$$

$$\delta x(\tau_i) - \delta x(\tau_i^-) = \frac{\partial \varphi_i(x(\tau_i^-))}{\partial x(\tau_i^-)} \delta x(\tau_i^-),\ i = \overline{1,m}, \tag{9}$$

$$\alpha_1 \delta x(t_1) + ... + \alpha_e \delta x(t_e) = 0.$$

Решение задачи (9) можно представить в виде

$$\delta x(t) = \int_{t_0}^{T} F(t,\tau)\, f_u(\tau)\, \delta u(\tau)\, dt, \tag{10}$$

где $F(t,\tau)$ - решение системы

$$F(\tau) - \int_{\tau}^{T} F(s) f_x(s) ds - \sum_{i=1}^{m} \theta(\tau_i^- - \tau) F_i \frac{\partial \varphi_i(x(\tau_i^-))}{\partial x(\tau_i^-)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} \theta(t_j - \tau) F_0 \alpha_j = \theta(t - \tau) E,$$

$$\sum_{j=1}^{l} F_0 \alpha_j - \int_{t_0}^{T} F(\tau)\, f_x(\tau)\, d\tau - \sum_{i=1}^{m-1} F_i \frac{\partial \varphi_i(x(\tau_i^-))}{\partial x(\tau_i^-)} = E,$$

$$F_i - \int_{t_0}^{T} \theta(\tau - \tau_i) F(\tau) f_x(\tau)\, d\tau - \sum_{k=1}^{m} \theta(\tau_k^- - \tau_i) F_k \frac{\partial \varphi_k(x(\tau_k^-))}{\partial x(\tau_k^-)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} \theta(t_j - \tau_i) F_0 \alpha_j = \theta(t - \tau_i) E,\ \ i = \overline{1,m}, \tag{11}$$

E - единичная $n \times n$ - мерная матрица, а t входит в задачу (11) как параметр.

Учитывая (10), вторую вариацию функционала можно представить в виде

$$\delta^2 S(u, \delta u) = -\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} \delta u'(\tau)\, f_u'(\tau) M(\tau, s) f_u(s) \delta u(s)\, d\tau\, ds -$$

$$-2\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} \delta u'(t) H_{ux}(t) F(t,\tau)\, f_u(\tau)\, \delta u(\tau)\, d\tau\, dt - \int_{t_0}^{T} \delta u'(t) H_{uu}(t)\, \delta u(t)\, dt, \tag{12}$$

где

$$M(\tau, s) = -\sum_{i,j=1}^{l} F'(t_i, \tau) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_i)\, \partial x(t_j)} F(t_j, s) + \sum_{i=1}^{m} F'(\tau_i^-, \tau) \frac{\partial^2 H_i}{\partial x(\tau_i^-)^2} F(\tau_i^-, s) +$$

$$+\int_{t_0}^{T} F'(t,\tau) H_{xx}(t) F(t,s)\,dt. \tag{13}$$

Необходимые условия оптимальности

Пусть $u(t)$ оптимальное управление. Тогда

$$\delta S(u,\delta u) = 0, \tag{14}$$

$$\delta^2 S(u,\delta u) \ge 0. \tag{15}$$

Из (14) легко получается, что вдоль оптимального управления имеет место равенство

$$H_u(t) = 0,\ \ t \in [t_0, T], \tag{16}$$

являющееся аналогом уравнения Эйлера.

Имеет место

Теорема 1. Если допустимое управление $u(t)$ удовлетворяет условию (16), то для его оптимальности в задаче (1)-(5) необходимо, чтобы неравенство

$$\int_{t_0}^{T} \delta u'(t) H_{uu}(t) \delta u(t)\,dt + 2\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} \delta u'(t) H_{ux}(t) F(t,s) f_u(s) \delta u(s)\,ds\,dt +$$

$$+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} \delta u'(\tau) f_u'(\tau) M(\tau,s) f_u(s) \delta u(s)\,d\tau\,ds \le 0 \tag{17}$$

выполнялось для всех $\delta u(t) \in KC(R^r, [t_0, T])$.

Отметим, что непосредственным следствием условия (17) является аналог условия Лежандра-Клебша

$$v' H_{uu}(t) v \le 0,\ \ t \in [t_0, T],\ \ v \in R^r. \tag{18}$$

Определение. Допустимое управление $u(t)$ назовем особым в классическом смысле управлением на $[t_0, T]$, если вдоль процесса $(u(t), x(t))$ выполняются равенства

$$H_u(t) = 0,\ \ \ v' H_{uu}(t)\ v = 0 \tag{19}$$

для всех $t \in [t_0, T],\ \ v \in R^r$.

Таким образом, для особых в классическом смысле управлений, аналог условия Лежандра-Клебша (18), вырождается.

Из теоремы 1 получается

Следствие. Для оптимальности особого в классическом смысле управления $u(t)$ необходимо, чтобы неравенство

$$v'\left\{\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} f_u'(\tau) M(\tau,s) f_u(s)\,d\tau\,ds + 2\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} H_{ux}(t) F(t,s) f_u(s)\,ds\,dt\right\} v \le 0 \tag{20}$$

выполнялось для всех $v \in R^r$.

Неравенство (20) является интегральным необходимым условием оптимальности для особых в классическом смысле управлений.

Введя вариацию управления специальным образом, доказывается поточечные необходимые условия оптимальности. Имеет место

Теорема 2. Для оптимальности особого в классическом смысле управления $u(t)$ в задаче (1)-(5) необходимо, чтобы для любого натурального числа k неравенства

$$\sum_{i=1}^{k} a_i v_i' H_{ux}(\sigma_i)\Big[a_i (F(\sigma_i+,\sigma_i)+F(\sigma_i,\sigma_i+))\, f_u(\sigma_i)v_i + \\ +2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} a_j F(\sigma_i,\sigma_j)\, f_u(\sigma_j)v_j\Big]+ \\ +\sum_{i,j=1}^{k} a_i a_j v_i' f_u'(\sigma_i) M(\sigma_i,\sigma_j)\, f_u(\sigma_j)v_j \le 0 \qquad (21)$$

выполнялись для всех $a_i \ge 0,\ v_i \in R^r,\ \sigma_i \in [t_0, T],\ i=\overline{1,k},\ (t_0 \le \sigma_1 < \ldots < \sigma_k < T)$.

Из условия (21) можно получить различные более удобные для проверки необходимые условия оптимальности особых в классическом смысле управлений. Например, имеет место

Следствие. Если $u(t)$ - особое в классическом смысле оптимальное управление в задаче (1)-(5), то вдоль процесса $(u(t), x(t))$ выполняется условие

$$v' f_u'(t) M(t,t)\, f_u(t)v + v' H_{ux}(t)(F(t+,t)+F(t,t+))\, f_u(t)v \le 0$$

для всех $t \in [t_0, T],\ v \in R^r$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М: Мир, 1971, 309 с.
2. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987, 287 с.
3. Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S. Theory of Impulsive Differential Equations. World Scientific, Singapore, 1989, 295 p.
4. Юсубов Ш.Ш. Необходимые условия оптимальности для системы импульсными воздействиями // ЖВМ и МФ, т.45, № 2, 2005, с.233-237.
5. Ягубов М.А., Кулиев Г.Ф., Юсубов Ш.Ш. Необходимые условия оптимальности для системы с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях / Akademik B.M.Əsgərovun 80 illik yubileyinə həsr olunmuş «Fizikanın aktual problemləri» beynəlxalq elmi konfransının materialları, Bakı, 2013, s.42-44.

LOKAL OLMAYAN SƏRHƏD ŞƏRTLİ İMPULS TƏSİRLİ SİSTEMLƏRDƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN ZƏRURİ ŞƏRTLƏR

Ş.Ş.YUSUBOV

XÜLASƏ

İşdə lokal olmayan sərhəd şərtli, impuls təsirli sistemlərdə optimal idarəetmə məsələləri öyrənilir.

Eyler tənliyi şəklində, Lejandr-Klebş şərti şəklində, həmçinin klassik mənada məxsusi idarəedicilərin optimallığı üçün müxtəlif zəruri şərtlər alınmışdır.

Açar sözlər: optimallıq üçün zəruri şərtlər, funksionalın variasiyaları, impuls təsirlər.

NECESSARY CONDITIONS OF OPTIMALITY IN THE IMPULSIVE SYSTEMS WITH NON-LOCAL BOUNDARY CONDITIONS

Sh.Sh.YUSUBOV

SUMMARY

In the work, the optimal control problem is considered in the impulsive systems with non-local boundary conditions. Necessary conditions of optimality are obtained in the forms of Euler equation and Lejandre-Klebsh condition. Also, various necessary conditions of optimality are obtained for the singular in the classical sense control.

Key words: necessary conditions of optimality, variation of the functional, impulsive influences.

Поступила в редакцию: 25.12.2013 г.
Подписано к печати: 27.12.2013 г.